

Applicazione del filtro di Kalman robusto per monitoraggio delle deformazioni in Real Time

Alberto CINA, Ambrogio M. MANZINO, Marco PIRAS

Politecnico di Torino, DITAG, C.so Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, Italy

0115647630, 0115647699, alberto.cina@polito.it

0115647675, 0115647699, ambrogio.manzino@polito.it

0115647675, 0115647699, marco.piras@polito.it

Riassunto

In questi ultimi anni il GPS viene sempre più utilizzato per il monitoraggio di eventi naturali quali frane o eruzioni vulcaniche. Spesso l'elaborazione dei dati e il calcolo della soluzione non avviene in tempo reale, ma solitamente è sufficiente il post-processing. Ci sono però fenomeni naturali che richiedono un controllo, e quindi una soluzione, epoca per epoca; in questi casi la sola soluzione sequenziale non può essere sufficiente in caso di errori grossolani. In questo lavoro si vuole sviluppare un algoritmo robusto di stima sequenziale, per poi applicarlo ad un caso di monitoraggio in tempo reale. Tale algoritmo si realizza basandosi su un modello simile al filtro di Kalman ma che, attraverso l'integrazione con lo stimatore *BIBER*, risulti robusto. Questo stimatore non è influenzato da un numero di errori grossolani all'interno dei dati sino al 20%. A tale fine è stato realizzato un software capace di stimare una soluzione in tempo reale, mediante un approccio sequenziale e robusto. Dalle prove effettuate si sono ottenuti dei risultati, che mettono in luce l'efficacia dei metodi studiati in particolare l'applicabilità delle metodologie robuste per il calcolo di soluzioni sequenziali.

Abstract

The GPS system frequently is employed in real time monitoring of natural events as landslides or volcanic eruptions. Data analysis and solution calculation are not made in real time, but usually the post-processing is enough. There are some natural phenomena that need a control in continuous, and therefore a solution, epoch by epoch. In this case, the classical sequential solution is not enough to obviate the gross error presence. The aim is developing an algorithm devoted to estimate a sequential and robust solution, which is applied in real time monitoring. The Kalman filter usually is used to estimate sequentially the solution, but it is not robust method. Some robust estimator allows to have the 20% of errors in the raw data. A particular software was developed, devoted to estimate a real time solution, using a sequential and robust approach. Tests carried out demonstrates the effectiveness of the methods studied particularly the applicability of the robust methodologies in the calculation of sequential solutions.

Introduzione

L'utilizzo di reti GPS per il monitoraggio ambientale sta sempre più assumendo un ruolo importante nelle applicazioni geomatiche. Spesso, per risolvere il problema del posizionamento real time, si ricorre all'algebra sequenziale: a volte sono sufficienti i minimi quadrati sequenziali, mentre in altre occasioni occorre utilizzare strumenti più complessi come il filtro di Kalman (KF) che consente di considerare anche eventuali matrici di moto. Il problema di fondo di queste procedure è la loro robustezza: la funzione obiettivo sul quale si basano, minimizza la sommatoria del quadrato degli scarti. Essi appartengono ad una distribuzione normale N , è verificato il principio di massima verosimiglianza, ottenendo così una elevata precisione della soluzione finale. In realtà, anche se

esistono degli strumenti per il controllo dati, la soluzione rischia di essere viziata dalla presenza di outlier o errori grossolani all'interno delle osservazioni.

Per questo motivo, risulta interessante la statistica robusta sequenziale, che costituisce uno strumento di calcolo preciso ma nel contempo anche robusto, adatto ad una buona soluzione in tempo reale anche in presenza di outlier.

Da queste considerazioni e a partire dal materiale presente in letteratura, è stato sviluppato questo lavoro che ha come finalità lo studio di un filtro di Kalman robusto per applicazioni di carattere geomatico, in particolare nell'ambito del monitoraggio GPS.

Algoritmo di calcolo sequenziale: richiamo sul filtro di Kalman

A differenza dei minimi quadrati sequenziali, questo algoritmo può operare in tempo reale su problemi dinamici, nei quali posizione e velocità variano epoca per epoca. L'ipotesi semplificativa di base è che il sistema sia linearizzato o linearizzabile, vale a dire si possano scrivere le misure y come relazione lineare dei parametri incogniti x e termini noti b :

$$y = Ax + b \quad [1]$$

Il filtro di Kalman prevede essenzialmente due fasi: predizione e correzione.

Nella fase di predizione si stimano i parametri all'epoca k usando le equazioni di stato e la stima all'epoca $k-1$:

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + \varepsilon_k \quad [2]$$

$\hat{x}_{k|k-1}$ è la previsione all'epoca k fatta con tutte le informazioni disponibili all'epoca $k-1$. F è la matrice di transizione, dipendente dal tempo e posta nota, ε l'errore nell'equazione di stato.

Nella fase di correzione si fa uso delle nuove misure b acquisite all'epoca k , per determinare la soluzione corretta:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (b_k - A_k \hat{x}_{k|k-1}) + e_k \quad [3]$$

dove e_k è l'errore di misura. Il termine tra parentesi rappresenta lo "scarto predetto", tra la misura b e la previsione Ax della misura fatta con le precedenti stime dei parametri. Esso, moltiplicato per la "matrice guadagno o di Kalman" K , rappresenta l'aggiornamento della soluzione precedente.

Il filtro di Kalman robusto (RKF)

La nostra proposta per rendere robusto il filtro di Kalman si fonda sullo stimatore BIBER (*Bounded Influence By standardizEd Residuals*). Questo stimatore fa parte della famiglia degli stimatori M, in particolare del tipo Schweppe. Lo stimatore, basato sul residuo standardizzato $\left(\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right)$, è definito dalla seguente funzione obiettivo:

$$\rho\left(\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_{vi}} v_i^2 & \text{per } \left|\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right| < c \\ \frac{c}{\sigma_{vi}} \left|v_i\right| - \frac{1}{2}c^2 & \text{per } \left|\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right| \geq c \end{cases} \quad [4]$$

La funzione di influenza, derivata prima della funzione obiettivo, è pari a:

$$\psi\left(\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right) = \begin{cases} \frac{v_i}{\sigma_{vi}} & \text{per } \left|\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right| < c \\ \text{sgn}(v_i) \cdot c & \text{per } \left|\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right| \geq c \end{cases} \quad [5]$$

oppure, analizzando i singoli scarti delle misure, la [5] può essere espressa come:

$$\psi_{ki}(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{per } |v_i| < k_i \\ \text{sgn}(v_i) \cdot k_i & \text{per } |v_i| \geq k_i \end{cases} \quad [6]$$

dove il termine $k_i = c \sigma_{vi}$ rappresenta l'estremo dell'intervallo all'interno del quale la funzione obiettivo coincide con quella dei minimi quadrati. Il termine k risulta essere diverso per ogni residuo, ma rimane invariato durante il processo di calcolo, una volta stimato σ_{vi} .

Sia la funzione obiettivo che d'influenza sono dipendenti dal residuo normalizzato; in questo modo è possibile considerare anche osservazioni di differente natura e precisione.

Diagrammando le funzioni suddette e confrontandole con le analoghe funzioni relativi ai minimi quadrati, si hanno le seguenti relazioni:

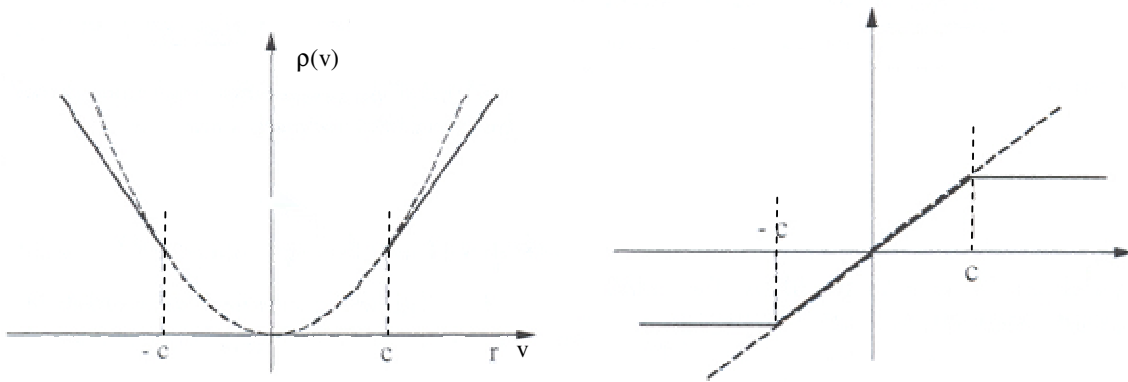


Figura 1 - Funzione obiettivo del Least Squares (---) e del *BIBER* estimator (—)

La soluzione viene ricercata minimizzando la funzione [4], nei tre differenti intervalli: $(-\infty; -c)$, $[-c; c]$ e $(c; \infty)$. La procedura di calcolo robusta è costituita da tre fasi:

- Soluzione minimi quadrati;
- Scelta dell'osservazione con il più alto valore di $\left(\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right)$;
- Se $\left(\frac{v_i}{\sigma_{vi}}\right) \notin [-k; k] \rightarrow$ Calcolo dei nuovi parametri incogniti e residui con metodi robusti.

Assumendo che il numero di outlier non sia troppo grande ($< 20\%$ dei dati), una prima compensazione può essere effettuata con il metodo dei minimi quadrati, che dà la possibilità di classificare tutte le osservazioni all'interno dell'intervallo $[-k; k]$. Nella seconda fase, l'osservazione con il più grande valore assoluto di residuo standardizzato, viene messa fuori dall'intervallo $[-k; k]$. Quando i residui sono correlati risulta poi difficile individuare l'osservazione con l'outlier, quindi scegliamo quella con valore assoluto del residuo più elevato. Dopo aver identificato la suddetta osservazione si possono stimare i parametri incogniti e i nuovi residui. Questo è possibile in quanto si dispone di una nuova funzione influenza, ottenibile mediante uno dei seguenti metodi:

- Ricalcolando parte della matrice normale;
- Correggendo l'osservazione y_i ;
- Diminuendo il peso dell'osservazione y_i .

Tutti e tre i metodi, è necessario ricordarlo, conducono allo stesso risultato. Nel nostro caso utilizzeremo il secondo, in quanto non si modifica la matrice normale N . Nel caso di correzione delle osservazioni, si cerca di modificare tutte le osservazioni che ricadono al di fuori dell'intervallo $[-k_i; k_i]$, in maniera tale che i residui di tali osservazioni corrispondano esattamente a $-k_i$ o $+k_i$. L'osservazione modificata, $y_{i(mod)}$ ha quindi una influenza minore nel calcolo dei parametri incogniti. Dal punto di visto algebrico, il problema è descritto come segue. I residui di y_i possono essere descritti, nel caso in cui la matrice dei pesi $P = I$, come:

$$v_i = -(q_{vv})_{i1} y_1 - \dots - z_i y_i - \dots - (q_{vv})_{in} y_n \quad [7]$$

Per le osservazioni modificate, in base a quanto detto prima, la [7] diventa:

$$\text{sgn}(v_i)k_i = -(q_{vv})_{i1} y_1 - \dots - z_i y_{i(mod)} - \dots - (q_{vv})_{in} y_n \quad [8]$$

Il termine z rappresenta il termine diagonale della matrice dei cofattori degli scarti Q_{vv} , per l'indice ii , eventualmente moltiplicato per corrispettivo coefficiente della matrice dei pesi P , se diverso da I . Definendo d_i come:

$$d_i = v_i - \text{sgn}(v_i)k_i \quad \text{per } |v_i| > k_i \quad [9]$$

e confrontando la (9) con la (10), l'osservazione modificata risulta pari a:

$$y_{i(mod)} = y_i - \frac{d_i}{-z_i} \quad [10]$$

Dopo aver modificato l'osservazione, i nuovi parametri, x_{rob} e i corrispettivi residui possono essere stimati. In questo modo non si deve invertire la matrice normale, in quanto la matrice disegno e i pesi non cambiano. I parametri incogniti e i residui rispettivi sono pari a:

$$x_{k(rob)} = x - (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \frac{d_i}{-z_i} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad [11] \quad v_{k(rob)} = Ax_{(rob)} - (y - \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \frac{d_i}{-z_i} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}) \quad [12]$$

Dopo questo primo calcolo deve essere stabilito se il nuovo residuo cade nell'intervallo $[-k_i; k_i]$. Questa procedura viene ripetuta iterativamente su tutte le osservazioni con residuo esterno a tale intervallo. Al termine del processo iterativo, sono stimati i parametri, mediante tecnica robusta. Tutti i residui calcolati, per ogni iterazione, ad ogni osservazione y_i , possono essere riassunti come:

$$\Delta d_i = \frac{1}{-z_i} \sum_{i=1}^{s-1} d_i \quad [13]$$

dove s è il numero di iterazioni. Il residuo totale sarà pari a:

$$r_{i(tot)} = k_i - \Delta d_i \quad [14]$$

La stima del σ_0^2 mediante minimi quadrati è la seguente:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n v^2 \quad [15]$$

Analogamente, per lo stimatore BIBER è stata proposta la seguente espressione [Huber (1981)]:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{(n-m)\beta} \sum_{i=1}^n \psi_{ki}^2(v_i) \quad [16]$$

dove β è una costante descritta da:

$$\beta = (c^2 + (1+c^2)(2\Phi(c)-1) - 2c\phi(c)) \quad [17]$$

Nella relazione [17] Φ rappresenta la distribuzione normale standard, mentre ϕ è la sua densità.

Si è cercato di applicare al filtro di Kalman il principio dello stimatore *BIBER*. A questo punto si opera mediante un processo iterativo che porta a modificare le osservazioni, in maniera tale da condurre il calcolo finale ai minimi quadrati. Introducendo la matrice guadagno K pari a :

$$K_k = Q_{k/k-1} A_k (A_k Q_{k/k-1} A_k^T + C_{ek})^{-1} \quad [18]$$

avremo una soluzione descritta da:

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (Y_{k(mod)} - A_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad [19]$$

Per il calcolo della varianza dell'unità di peso σ_0^2 occorre richiamare le relazioni [15] e [16].

In maniera sequenziale, possiamo descrivere la relazione [16] come:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n v^2 = \frac{1}{n-m} \left[(\hat{v}^T P \hat{v})_{old} + \Delta(\hat{v}^T P \hat{v})_{new} \right] \quad [20]$$

dove

$$\Delta(\hat{v}^T P \hat{v})_{new} = (Y_{k(mod)} - A_k \hat{x}_{k-1})^T T (Y_{k(mod)} - A_k \hat{x}_{k-1}) \quad [21]$$

con T ricavabile da:

$$T = (P_k^{-1} + A_k Q_{xx(k-1)} A_k^T)^{-1} \quad [22]$$

Riscrivendo la relazione [17] utilizzando quando descritto in [21], otteniamo che:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{(n-m)\beta} \left\{ \left(\sum_I v_{k-1}^2 + c^2 \sum_{II} z_{k-1}^2 \right) + (Y_{k(mod)} - A_k \hat{x}_{k-1})^T T (Y_{k(mod)} - A_k \hat{x}_{k-1}) \right\} \quad [23]$$

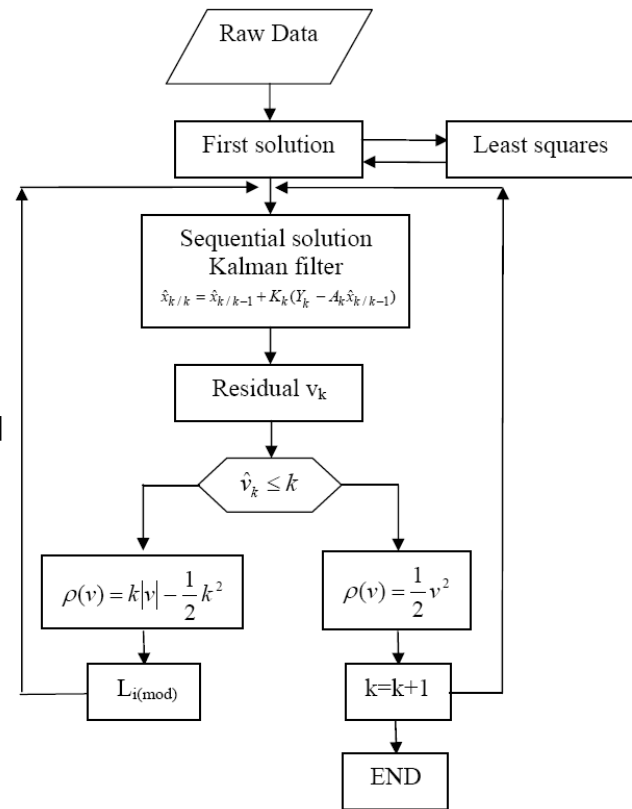


Figura 2 - Flowchart filtro Kalman robusto

Questo metodo si adatta molto bene per calcoli sequenziali, nel nostro caso con il filtro di Kalman in quanto modifica essenzialmente le osservazioni correnti. Soprattutto non viene modificata la matrice normale che nel KF è solamente aggiornata sequenzialmente e non ricalcolata. Di seguito verranno mostrate alcune applicazioni di questo ultimo metodo descritto, in problemi di geodesia.

Applicazione del metodo in Geomatica

L'algoritmo descritto in precedenza è stato implementato in linguaggio MATLAB™ ed applicato ad alcuni problemi di calcolo sequenziali riscontrabili in Geodesia, in particolare operando con misure GPS. Un problema abbastanza frequente, usando le tecniche sequenziali, è quello del filtraggio dati,

in particolare in caso di outlier o “NO DATA”; questo caso specifico è sempre più di maggiore interesse, in relazione all’impiego crescente delle reti di stazioni permanenti per posizionamento in tempo reale. L’andamento delle correzioni differenziali d’area può subire infatti improvvisi picchi a causa della mancanza di dati in una delle stazioni di rete. Una tecnica robusta consente di individuare e rimuovere in tempo reale eventuali errori all’interno delle correzioni da interpolare, al fine di evitare un errato posizionamento *NRTK*. Nel post processing, ad esempio, le serie temporali possono avere al loro interno brevi mancanze dovute all’assenza dei dati o bruschi salti causati dal cambiamento delle condizioni della stazione GPS (i.e. cambio antenna ricevente). L’effetto di questi “picchi”, se non rimosso, può condurre ad una soluzione errata. La procedura studiata RKF è stata verificata su dati generati, nei quali sono stati introdotti degli outlier. In fig. 3 sono riportate un gruppo di osservazioni (circa 100) e i “NO DATA” rappresentano circa il 10%. Il RKF implementato, ha un comportamento robusto sino ad un *breakpoint* pari a circa 20%.

Si è fatto un confronto tra i risultati ottenuti mediante una soluzione calcolata con i minimi quadrati sequenziali, che in un caso statico, coincidono con il filtro di Kalman, e il metodo RKF. Il filtro di Kalman tradizionale, potrebbe anche non risentire della presenza di outlier se questo si è verificato tante epoche prima e, soprattutto, è un caso raro. Il problema si aggrava quando il numero di outlier aumenta e la distribuzione è casuale, quindi ogni soluzione potrebbe essere contaminata da outlier. Comparando le soluzioni si ottiene una soluzione stimata epoca per epoca dal RKF che rispecchia bene l’andamento dei dati grezzi, mentre la soluzione LS risulta, con il passare delle epoche, peggiore e conduce ad un’errata stima.

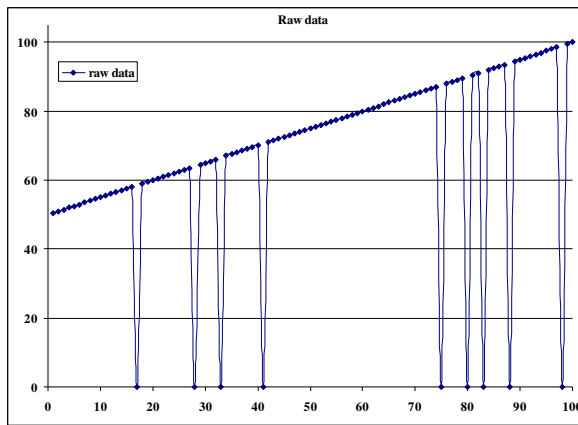


Figura 3 - Set dati originali

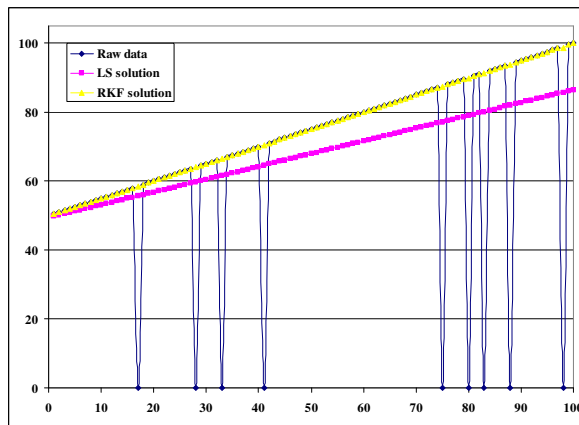


Figura 4 - Confronto soluzioni SLS vs RKF

Conclusioni

In questo periodo lo sviluppo delle reti di stazioni permanenti sta subendo una rapida ascesa, soprattutto per quanto riguarda le tipologie di modellazione e generazione delle correzioni differenziali d’area. Il problema emergente è l’affidabilità di tali soluzioni. A tal fine i metodi robusti (*LMS*, *Huber*, *BIBER*) non sono solo un valido strumento di calcolo della soluzione, ma anche un ottimo filtro per l’individuazione di outlier o altri tipi di errori e validi strumenti da abbinare a processi di calcolo sequenziale.

Bibliografia

- Carosio A., Cina A., Piras M. (2005): “The Robust Statistics Method applied to the Kalman filter: theory and application”, Atti ION GNSS 2005, Long Beach, (CA), USA
- Cipra T., Romera R. (1991): “Robust Kalman Filter and Its Applications in Time Series Analysis”, *Kybernetika* 27; 481-494;
- Huber J. P. (1981): *Robust statistics*, Wiley, New York;
- Huber J. P., Ronchetti M. E., Rousseeuw P. J., Stahel W. A. (1986): *Robust statistics: the approach based on influence functions*, Wiley, New York.