

MOMENTI GEOMETRICI GENERALIZZATI DI FIGURE PIANE

Maria Grazia D'URSO

Università degli Studi di Cassino - via G. Di Biagio, 43 - 03043 Cassino (FR). E-mail: durso@unicas.it

Riassunto

Si deriva una formula per calcolare i momenti generalizzati di figure piane attraverso integrali estesi unicamente alla frontiera del dominio in cui esse sono definite. Il risultato è ottenuto estendendo al caso in esame la omologa trattazione, presentata in (D'Urso, 2003) per i momenti ordinari, basata sull'applicazione del teorema di Gauss a campi tensoriali di forma opportuna.

Abstract

It is presented a formula for computing generalized moments of two-dimensional figures by means of integrals defined exclusively on the boundary of the domain on which the figures are defined. The result is obtained by extending to the case of interest the analogous treatment, presented in (D'Urso, 2003) for the ordinary moments, based upon the application of Gauss theorem to suitable tensor fields.

Introduzione

La rappresentazione degli oggetti è una questione fondamentale nel processamento delle immagini, nel riconoscimento delle forme e, più in generale, nelle applicazioni della cosiddetta “computer vision” (Mukundan, Ramakrishnan, 1998), (Gonzales, Woods, 2002).

Ad esempio, un problema ricorrente nel processamento delle immagini è il calcolo dell'area, del baricentro, dei momenti d'inerzia e dei momenti geometrici di ordine superiore della regione occupata dall'immagine. Il generico di tali momenti, denotato con m_{pq} dove p e q sono interi, è definito come l'integrale esteso alla regione occupata dall'oggetto, supposta piana, del prodotto di x^p e y^q dove x e y rappresentano le coordinate cartesiane del generico punto dell'oggetto. Pertanto, m_{00} rappresenta l'area dell'oggetto, m_{10} e m_{01} sono utili per calcolarne il baricentro mentre m_{20} , m_{11} e m_{02} consentono di calcolare i momenti d'inerzia dell'oggetto in esame.

In altri termini i momenti geometrici, denotati nel seguito *momenti* per semplicità, costituiscono proprietà fondamentali associate alla forma dell'oggetto e sono utili, ad esempio, per approssimare contorni estratti dall'oggetto (Shu *et al.*, 2002) attraverso ellissi (Haralick, Shapiro, 1992). Inoltre, le direzioni dominanti di un oggetto sono fondamentali per le questioni relative alla calibrazione delle fotocamere (Kasser, Egels, 2002).

Tuttavia, in svariate applicazioni, è richiesto il calcolo di momenti ancora più complessi, denotati nel seguito *momenti generalizzati*, per i quali la funzione integranda è costituita dal prodotto $x^p y^q$ per una funzione scalare:

$$g(x, y) = (f \circ h)(x, y) = f[h(x, y)] \quad [1]$$

definita dalla composizione di una arbitraria funzione scalare f , ad esempio la funzione logaritmo o una funzione polinomiale, e di una funzione affine h delle coordinate:

$$h(x, y) = a + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = a + \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a + g_x x + g_y y \quad [2]$$

in cui a , g_x e g_y sono costanti arbitrarie.

Il calcolo dei momenti generalizzati definiti in precedenza è di interesse in svariate applicazioni. Ad esempio la funzione f può rappresentare il livello di intensità del punto definito dalle coordinate x e y nelle immagini a livello di grigio (Chaumette, 2004) e tale funzione può variare con continuità per effetto di algoritmi di interpolazione (Shi, Reichenbach, 2006) o a causa delle trasformazioni cui l'immagine viene sottoposta nelle applicazioni (Li *et al.*, 2004), (Jaklič, Solina, 2003).

Inoltre, la funzione f può essere impiegata negli algoritmi di individuazione dei lati degli oggetti con precisione dell'ordine del subpixel (Cheng, Wu, 2005) o può rappresentare la distribuzione del colore dell'immagine sicchè la (1) può essere utilizzata per approssimare le leggi di distribuzione comunemente adottate (Mindru *et al.*, 2004); per tale motivo si prenderà anche in considerazione il caso in cui la funzione f sia il prodotto di due o tre funzioni potenza dipendenti dalla funzione h .

Ulteriori applicazioni (Chen, Arvo, 2001) richiedono il calcolo dei momenti generalizzati in cui il dominio di integrazione è costituito da una superficie arbitraria anziché piana come nei casi considerati nel presente lavoro. In ogni caso la metodologia esposta nel seguito può essere estesa anche a questi ultimi casi; infatti, essa si basa su una opportuna applicazione del teorema di Gauss, che estende quella analoga presentata in (D'Urso, 2003), in modo da esprimere l'integrale di area che compare nella definizione dei momenti generalizzati in funzione di integrali estesi alla sola frontiera del dominio.

Momenti geometrici generalizzati di domini piani

Sia Ω un dominio regolare del piano e $\mathbf{r}$ il raggio vettore che individua la posizione di un generico punto di Ω . Detti p e q due interi e posto $z = p + q$, con $z=[0, 1, \dots]$, si definisce momento (geometrico) generalizzato di ordine z il tensore:

$$\mathbf{M}_z = \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}}_{z \text{ volte}} dA, \quad [3]$$

dove il simbolo $\otimes$ denota il prodotto tensoriale, o diadico, tra vettori (Zund, 1994).

Considerando, ad esempio, il caso $z = 3$:

$$[\mathbf{M}_3]^T = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x^3 dA & \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x^2 y dA & \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x y^2 dA & \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x y^2 dA \\ \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x^2 y dA & \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x y^2 dA & \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x y^2 dA & \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) y^3 dA \end{bmatrix}^T \quad [4]$$

si comprende che il momento generalizzato di ordine pq con $p + q \leq 3$:

$$m_{pq} = \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x^p y^q dA, \quad [5]$$

non è altri che una delle componenti del tensore $\mathbf{M}_3$.

Nel seguito, per brevità, faremo riferimento ai casi $z \leq 2$; in particolare si vuole illustrare una metodologia, basata sul teorema di Gauss, che consente di valutare i momenti generalizzati attraverso degli integrali di linea anziché di superficie.

Espressione dei momenti generalizzati di funzioni monomie attraverso integrali di frontiera

Il calcolo dei momenti [5] attraverso integrali di frontiera si basa sul seguente risultato:

$$f(h) = \text{div}(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}) \quad [6]$$

in cui div è l'operatore divergenza, $f^{(+1)}$ è una primitiva della funzione f e $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})$. Si osservi che quest'ultima quantità è ben definita in quanto si considera il caso non banale $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$.

Analogamente, la scelta della costante di integrazione nella definizione della primitiva $f^{(+1)}$ è del tutto inessenziale essendo essa argomento dell'operatore divergenza.

Per dimostrare la [6] si osservi che, in base alla definizione di divergenza di un campo vettoriale (Kreyszig, 1993), risulta:

$$\text{div}(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}) = (f^{(+1)}(h)\hat{g}_i)_{,i} \quad [7]$$

dove il simbolo $(\cdot)_{,i}$ indica derivazione dell'argomento $(\cdot)$ rispetto alla componente i -esima delle

variabili di campo ($i = 1 \rightarrow \partial / \partial x$; $i = 2 \rightarrow \partial / \partial y$) e si è adottata la convenzione degli indici ripetuti. Osservando che la funzione h dipende da x e y , la [7] fornisce, in base alla regola di derivazione del prodotto:

$$\text{div}(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}) = \frac{\partial f^{(+1)}}{\partial h} h_{/i} \hat{g}_i + f^{(+1)}(h) \hat{g}_{i/i} \quad [8]$$

Poiché il campo vettoriale $\hat{\mathbf{g}}$ è costante il secondo termine a secondo membro della espressione precedente è nullo. Inoltre, per definizione di $f^{(+1)}$, risulta $\partial f^{(+1)} / \partial h = f$ e:

$$h_{/i} = (a + g_k x_k)_{/i} = g_k x_{k/i} = g_k \delta_{ki} = g_i \quad [9]$$

dove δ indica il simbolo di Kronecker:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad [10]$$

In definitiva, sostituendo la [9] nella [8] si ha:

$$\text{div}(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}) = f(h)g_i \hat{g}_i = f(h)g_i g_i / (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) = f(h)$$

ed il risultato è provato.

Oltre che importante di per sé, la formula [6] è particolarmente utile per ricavare identità analoghe che sussistono per campi tensoriali di ordine superiore. In particolare si ha:

$$\text{div}[\mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}] = f(h)\mathbf{r} + f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}} \quad [11]$$

Infatti, la divergenza di un campo tensoriale di ordine 2 è il campo vettoriale la cui componente i -esima è definita dalla seguente espressione (Zund, 1994):

$$\{\text{div}[\mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\}_i = (\mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}})_{ij/j} = (x_i f^{(+1)}(h)\hat{g}_j)_{/j} \quad [12]$$

Adottando la regola di derivazione del prodotto si ha:

$$\begin{aligned} \{\text{div}[\mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\}_i &= x_{i/j} f^{(+1)}(h)\hat{g}_j + x_i \frac{\partial f^{(+1)}}{\partial h} h_{/j} \hat{g}_j = \delta_{ij} f^{(+1)}(h)\hat{g}_j + x_i f(h)g_j \hat{g}_j \\ &= f^{(+1)}(h)\hat{g}_i + x_i f(h) \end{aligned} \quad [13]$$

in cui si è sfruttata la [9]. E' ben evidente che la [13] non è altro che la relazione [11] espressa in componenti.

Infine, si riporta per completezza la dimostrazione dell'ulteriore risultato:

$$\text{div}[\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}] = f^{(+1)}(h)(\hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \hat{\mathbf{g}}) + f(h)(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \quad [14]$$

sebbene essa sia condotta con una tecnica del tutto simile a quella utilizzata per la [13]. Nel caso specifico la componente cartesiana:

$$\begin{aligned} \{\text{div}[\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\}_{ij} &= (x_i x_j f^{(+1)}(h)\hat{g}_k)_{/k} \\ &= x_{i/k} x_j f^{(+1)}(h)\hat{g}_k + x_i x_{j/k} f^{(+1)}(h)\hat{g}_k + x_i x_j \frac{\partial f^{(+1)}}{\partial h} h_{/k} \hat{g}_k \\ &= \hat{g}_i x_j f^{(+1)}(h) + x_i \hat{g}_j f^{(+1)}(h) + x_i x_j f(h) \\ &= \{f^{(+1)}(h)(\hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \hat{\mathbf{g}}) + f(h)(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\}_{ij} \end{aligned} \quad [15]$$

Si mostrerà nel seguito come i risultati [6], [11] e [14] possano essere utilizzati per esprimere le quantità $f(h)$, $f(h)\mathbf{r}$ e $f(h)(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$ esclusivamente in funzione di operatori di divergenza, in modo da poter invocare il teorema di Gauss e ricondurre il calcolo degli integrali:

$$\int_{\Omega} f(h) dA, \quad \int_{\Omega} f(h)\mathbf{r} dA, \quad \int_{\Omega} f(h)(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA \quad [16]$$

a semplici integrali di frontiera. Ciò è evidente per il primo integrale risultando, in base alla [6]:

$$\int_{\Omega} f(h) dA = \int_{\Omega} \text{div}(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}) dA = \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}(h[\mathbf{r}(s)])[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)] ds \quad [17]$$

In virtù del risultato precedente, quindi, l'originario integrale di area può essere calcolato più

semplicemente eseguendo l'integrazione, sulla frontiera del dominio Ω , della primitiva di f amplificata del prodotto $[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]$; si noti che nel caso di frontiere poligonali, quest'ultimo prodotto è costante a tratti sicchè l'ultimo integrale nella [17] può ulteriormente semplificarsi. Per esprimere l'integrale di area della funzione $f(h)\mathbf{r}$ in termini di integrali di linea è sufficiente invocare la [11]:

$$\int_{\Omega} f(h)\mathbf{r}dA = \int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{r} \otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}]dA - \int_{\Omega} f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}dA$$

sicchè la [17] fornisce:

$$\int_{\Omega} f(h)\mathbf{r}dA = \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}(h[\mathbf{r}(s)])\mathbf{r}(s)[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]ds - \left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}(h[\mathbf{r}(s)])[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]ds \right] \hat{\mathbf{g}} \quad [18]$$

in cui si è tenuto conto che il campo vettoriale $\hat{\mathbf{g}}$ è costante.

Infine, si ricava dalla [14]:

$$\int_{\Omega} f(h)(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})dA = \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}(h[\mathbf{r}(s)])(\mathbf{r}(s) \otimes \mathbf{r}(s))[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]ds - \left[\hat{\mathbf{g}} \otimes \int_{\Omega} f^{(+1)}(h)\mathbf{r}dA + \int_{\Omega} f^{(+1)}(h)\mathbf{r}dA \otimes \hat{\mathbf{g}} \right]$$

Pertanto, invocando la [18], si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(h)(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})dA &= \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}(h[\mathbf{r}(s)])(\mathbf{r}(s) \otimes \mathbf{r}(s))[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]ds + \\ &\quad - \int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}(h[\mathbf{r}(s)])[\hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}(s) \otimes \hat{\mathbf{g}}][\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]ds + \\ &\quad + 2 \left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+3)}(h[\mathbf{r}(s)])[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)]ds \right] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \end{aligned} \quad [19]$$

E' evidente che la procedura illustrata in precedenza può essere estesa, a patto di eseguire tediose calcolazioni, al caso dei momenti generalizzati di ordine z , con $z > 2$, e cioè alle componenti del prodotto tensoriale $g(\mathbf{r}) \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}}_{z \text{ volte}}$.

Espressione dei momenti generalizzati di funzioni binomie attraverso integrali di frontiera

Il quadro metodologico delineato nella sezione precedente verrà utilizzato in quella attuale per consentire il calcolo, unicamente attraverso integrali di frontiera, dei momenti generalizzati di funzioni binomie esprimibili nella forma:

$$g(x, y) = h_1^s(x, y) h_2^t(x, y) \quad [20]$$

in cui s e t sono interi arbitrari e h_1 e h_2 sono funzioni affini i cui gradienti di modulo unitario saranno denotati, rispettivamente, con $\hat{\mathbf{g}}_1$ e $\hat{\mathbf{g}}_2$.

Poiché ragioni di spazio non consentono una trattazione esaustiva di questo caso, preliminare a quello trattato nella sezione successiva, si illustreranno brevemente i principali risultati rimandando i necessari approfondimenti a lavori successivi.

Per fissare le idee si supponga di voler calcolare il momento generalizzato di ordine zero della funzione $g(x, y) = h_1(x, y) h_2(x, y)$ e cioè di quella che si ottiene ponendo nella [20] $s = 1$ e $t = 1$.

Con ragionamento analogo a quello utilizzato per dimostrare la [6] si ottiene:

$$\text{div}[h_1^2 h_2 \hat{\mathbf{g}}_1] = 2h_1 h_2 + h_1^2 (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \quad [21]$$

ovvero:

$$\int_{\Omega} h_1 h_2 dA = \frac{1}{2} \left\{ \int_{Fr(\Omega)} h_1^2[\mathbf{r}(s)] h_2[\mathbf{r}(s)] [\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{n}(s)] ds - \left[\int_{\Omega} h_1^2 dA \right] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \right\}$$

Consegue allora dalla [17]

$$\int_{\Omega} h_1 h_2 dA = \frac{1}{2} \left\{ \int_{Fr(\Omega)} h_1^2[\mathbf{r}(s)] h_2[\mathbf{r}(s)] [\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{n}(s)] ds - \frac{1}{3} \left[\int_{Fr(\Omega)} h_1^3[\mathbf{r}(s)] [\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{n}(s)] ds \right] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \right\} \quad [22]$$

sicchè l'integrale di area a primo membro è espresso unicamente attraverso integrali di frontiera. Si

noti che il calcolo del momento generalizzato del prodotto $h_1 h_2$ poteva essere equivalentemente originato considerando l'espressione $\text{div}[h_1 h_2^2 \hat{\mathbf{g}}_2]$ nella [21].

La [21] può essere generalizzata come segue:

$$h_1^s h_2 = \frac{1}{s+1} \left\{ \text{div}[h_1^{(s+1)} h_2 \hat{\mathbf{g}}_1] - \frac{1}{s+2} \text{div}[h_1^{(s+2)} \hat{\mathbf{g}}_1] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \right\} \quad [23]$$

con $s \geq 1$, e quest'ultima può essere utilizzata per esprimere il prodotto binomio:

$$h_1^s h_2^2 = \frac{1}{s+1} \left\{ \text{div}[h_1^{(s+1)} h_2^2 \hat{\mathbf{g}}_1] - 2 h_1^{(s+1)} h_2 (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \right\} \quad [24]$$

in funzione di soli operatori di divergenza. Infatti, la sostituzione della [23] nella [24] fornisce:

$$h_1^s h_2^2 = \frac{1}{s+1} \left\{ \text{div}[h_1^{(s+1)} h_2^2 \hat{\mathbf{g}}_1] - \frac{2}{s+2} \left[\text{div}[h_1^{(s+2)} h_2 \hat{\mathbf{g}}_1] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) - \frac{1}{s+3} \text{div}[h_1^{(s+3)} \hat{\mathbf{g}}_1] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1)^2 \right] \right\} \quad [25]$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h_1^s h_2^2 dA &= \frac{1}{s+1} \left\{ \int_{Fr(\Omega)} h_1^{(s+1)}[\mathbf{r}(s)] h_2^2[\mathbf{r}(s)] [\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{n}(s)] ds + \right. \\ &\quad - \frac{2}{s+2} \left[\int_{Fr(\Omega)} h_1^{(s+2)}[\mathbf{r}(s)] h_2[\mathbf{r}(s)] [\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{n}(s)] ds \right] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \\ &\quad \left. - \frac{1}{s+3} \left[\int_{Fr(\Omega)} h_1^{(s+3)}[\mathbf{r}(s)] [\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{n}(s)] ds \right] (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1)^2 \right\} \end{aligned} \quad [26]$$

Infine, il caso in cui l'esponente della funzione h_2 sia maggiore di 2 può essere gestito con una tecnica analoga a quella descritta in precedenza.

Ovviamente le formule, analoghe delle [22] e [26], corrispondenti al caso in cui gli esponenti delle funzioni h_1 e h_2 sono tra loro scambiati si ottengono scambiando reciprocamente i pedici 1 e 2.

Espressione dei momenti generalizzati di funzioni trinomie attraverso integrali di frontiera

Le considerazioni svolte nella sezione precedente sono propedeutiche a quelle illustrate di seguito in cui si considera il calcolo dei momenti generalizzati di funzioni trinomie del tipo:

$$g(x, y) = h_1^s(x, y) h_2^t(x, y) h_3^u(x, y) \quad [27]$$

Questo caso, di maggiore interesse applicativo, riguarda infatti il caso in cui h_1 , h_2 e h_3 rappresentano, rispettivamente, l'intensità dei colori rosso, verde e blu di un'immagine in corrispondenza del generico punto di coordinate x e y .

L'approccio da adottare per il calcolo dei momenti generalizzati è analogo a quello impiegato nella [21]. Risulta ora, per $s > 1$:

$$\text{div}[h_1^s h_2 h_3 \hat{\mathbf{g}}_1] = s h_1^{(s-1)} h_2 h_3 + h_1^s h_3 (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) + h_1^s h_2 (\mathbf{g}_3 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \quad [28]$$

in cui i prodotti $h_1^s h_2$ e $h_1^s h_3$ si esprimono in termini di operatori divergenza tramite la [23].

In funzione di tali espressioni e di quelle calcolate nella sezione precedente è possibile calcolare, in cascata, quelle nelle quali almeno due tra le funzioni h_1 , h_2 e h_3 compaiono con potenze maggiori di 1 nel prodotto tra di esse. Ad esempio, per calcolare il momento generalizzato della funzione $h_1^2 h_2^2 h_3$ si può considerare l'espressione:

$$\text{div}[h_1^3 h_2^2 h_3 \hat{\mathbf{g}}_1] = 3 h_1^2 h_2^2 h_3 + 2 h_1^3 h_2 h_3 (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) + h_1^3 h_2^2 (\mathbf{g}_3 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \quad [29]$$

in quanto il prodotto $h_1^3 h_2 h_3$ può essere espresso in termini di operatori divergenza specializzando la [28] al caso $s = 3$ ed il prodotto $h_1^3 h_2^2$ ponendo $s = 2$ nella [25]. E' opportuno, infine, sottolineare che il calcolo di $h_1^2 h_2^2 h_3$ poteva essere condotto, in maniera del tutto equivalente, a partire dalla espressione $\text{div}[h_1^2 h_2^3 h_3 \hat{\mathbf{g}}_2]$.

Infine, si riporta per completezza una delle relazioni che può essere utilizzata per il calcolo del prodotto $h_1^2 h_2^2 h_3^2$:

$$\text{div}[h_1^3 h_2^2 h_3^2 \hat{\mathbf{g}}_1] = 3h_1^2 h_2^2 h_3^2 + 2h_1^3 h_2 h_3^2 (\mathbf{g}_2 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) + 2h_1^3 h_2^2 h_3 (\mathbf{g}_3 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1) \quad [30]$$

osservando che i termini $h_1^3 h_2 h_3^2$ e $h_1^3 h_2^2 h_3$ si ricavano dalla [29].

Le espressioni esplicite dei momenti generalizzati dei prodotti di funzioni fin qui considerate non vengono riportate per motivi di spazio ma esse possono essere facilmente ricavate come già mostrato per la [22] e la [26].

Bibliografia

- Chaumette F. (2004), “Image moments: a general and useful set of features for visual servoing”, *IEEE Transactions on Robotics*, 20: 713-723.
- Chen M., Arvo J. (2001), “Simulating non-lambertian phenomena involving linearly-varying luminaires”, *Proceedings of the 12th Eurographics Workshop on Rendering*. London.
- Cheng S., Wu T. (2005), “Subpixel edge detection of color images by principal axis analysis and moment-preserving principle”, *Pattern Recognition*, 38: 527-537.
- D’Urso M.G. (2003), “Sul calcolo dei momenti geometrici di figure poligonali”, *Atti della VII Conferenza Nazionale ASITA*, Verona.
- Gonzales L., Woods R. (2002), *Digital Image Processing*, 2nd ed., Prentice Hall.
- Haralick R.M., Shapiro L.G. (1992), *Computer and Robot Vision*, Addison-Wesley, vol. I.
- Jaklič J., Solina F. (2003), “Moments of superellipsoids and their application to range image registration”, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics*, 33: 648-657.
- Kasser M., Egels Y. (2002), *Digital Photogrammetry*, Taylor & Francis, London.
- Kreyszig, E. (1993), *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley.
- Li Z., Wang H., Liao S.S.Y. (2004), “Numerical algorithms for image geometric transformations and applications”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics*, 34: 132-149.
- Mindru F., Tuytelaars T., Van Gool L., Moons T. (2004), “Moment invariants for recognition under changing viewpoint and illumination”, *Computer Vision and Image Understanding*, 94: 3-27.
- Mukundan R., Ramakrishnan K.R. (1998), *Moment Functions in Image Analysis - Theory and Applications*, World Scientific.
- Preparata S., Shamos M.I. (1985), *Computational Geometry: An Introduction*, Springer.
- Shi J., Reichenbach S.E. (2006), “Image interpolation by two-dimensional parametric cubic convolution”, *IEEE Transactions on Image Processing*, 15: 1857-1870.
- Shu H.Z., Luo L.M., Zhou J.D., Bao X.D. (2002), “Moment-based methods for polygonal approximation of digitised curves”, *Pattern Recognition*, 35: 421-434.
- Zund J. (1994), *Foundations of Differential Geodesy*, Springer.